代数模拟测试

考试时间：19:00-21:30(150 分钟)　　姓名：________________

一、(本题满分 40 分)

设正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1-a_{i+1}}{1-a_i}.$$

二、(本题满分 40 分)

对正整数 n, 令 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. 证明: 对满足 $0 \leq a < b \leq 1$ 的任意实数 a, b, 数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项属于 (a, b).

三、(本题满分 50 分)

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是正实数. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^3 + x_{i-1}x_i x_{i+1}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i x_{i+1}(x_i + x_{i+1})}.$$

四、(本题满分 50 分)

给定正偶数 n，对 $a_i \geq 0 (1 \leq i \leq n), \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$. 求

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{(i-j)^2, (n+i-j)^2\} a_i a_j$$

的最大值.