Solution

Algebraic Problems

Sherlock Young

School of Mathematical Sciences
Nankai University

Quanzhou 2024.7

Contents

Problem1

Problem1

Problem1(40points)

设正实数 $a_1, a_2, ..., a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1 - a_{i+1}}{1 - a_i}$$

Solution

思路：适当变形 + 权方和不等式 + 均值不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{1-a_{i+1}}{1-a_i} \iff \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}-\frac{1-a_{i+1}}{1-a_i}\right) \geq n$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{a_{i+1}}-\frac{a_i+\sum\limits_{k\neq i,i+1} a_k}{a_{i+1}+\sum\limits_{k\neq i,i+1} a_k}\right) \geq n$$

Remark: $a_i+\sum\limits_{k\neq i,i+1} a_k = -a_{i+1}+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1-a_{i+1}$

Solution

$$\iff \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i+1}^2+a_i\sum\limits_{k\neq i,i+1}a_k}{a_{i+1}^2+a_{i+1}\sum\limits_{k\neq i,i+1}a_k}\right)\geq n \quad (\Psi)$$

由 $Cauchy-Inequation$(或者权方和不等式) 可知:

$$\left(a_{i+1}^2+a_i\sum_{k\neq i,i+1}a_k\right)\left(1+\sum_{k\neq i,i+1}\frac{a_k}{a_i}\right)\geq\left(a_{i+1}+\sum_{k\neq i,i+1}a_k\right)^2$$

代入 (Ψ) 式中，故我们只需要证明:

Solution

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(a_{i+1}^2+a_i\sum\limits_{k\neq i,i+1}a_k\right)\left(1+\sum\limits_{k\neq i,i+1}\frac{a_k}{a_i}\right)}{\left(a_{i+1}^2+a_{i+1}\sum\limits_{k\neq i,i+1}a_k\right)\left(1+\sum\limits_{k\neq i,i+1}\frac{a_k}{a_i}\right)}\right)\geq n$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\left(1-a_i\right)}{a_{i+1}\left(1-a_{i+1}\right)}\geq n$$

而我们由均值不等式可知:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\left(1-a_i\right)}{a_{i+1}\left(1-a_{i+1}\right)}\geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i\left(1-a_i\right)}{a_{i+1}\left(1-a_{i+1}\right)}}=n\times 1=n$$

故原命题成立!

Problem2

Problem2

Problem2(40points)

对正整数 n，令 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$. 证明:

对满足 $0 \leq a < b \leq 1$ 的任意实数 a, b，数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项属于 (a, b)

Lemma

Lemma

调和数列 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ 发散.

Proof.

1

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}n$$

□

Solution

Lemma

调和数列 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ 发散.

Proof.

2

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} = \ln(n+1)$$

$$n \to +\infty \qquad S_n \to +\infty$$

$\square$

Solution1

Step1.

令 $N_0=\left[\frac{1}{b-a}\right]+1, m=[S_{N_0}]+1$, 则 $\frac{1}{b-a}<N_0, \frac{1}{N_0}<b-a.\quad S_{N_0}<m\leq m+a$

由我们的引理可知 $\exists N_1=2^{2(m+1)}$, 则 $S_{N_1}=S_{2^{2(m+1)}}>m+1\geq m+b.$

从而，$\exists n\in\mathbb{N}, N_0<n<N_1$ s.t. $m+a<S_n<m+b\Rightarrow\{S_n\}\in(a,b)$

否则 $\exists N_0<k$ s.t. $S_{k-1}\leq m+a, S_k\geq m+b$

$\Rightarrow S_k-S_{k-1}=\frac{1}{k}<\frac{1}{N_0}<b-a$ 矛盾!

故一定 $\exists n\in\mathbb{N}$ s.t. $\{S_n\}\in(a,b)$

Step2.

假设只有有限个正整数 $n_1, n_2, ..., n_m$ s.t. $\{S_{n_i}\}\in(a,b)$

我们取 $\{S_{n_i}\}\in(a,b)$ 中的最小值为 d, 则 $a<d<b$, 故 $!\exists n\in\mathbb{N}$ s.t.

$\{S_n\}\in(a,d)$ 与 **Step1.** 中结论矛盾!

故原命题成立

Solution2

我们也可以利用**连续性**的观点来解决这个问题.(本质性)

Problem3

Problem3

Problem3(50points)

设 $x_1, x_2, ..., x_n$ **是正实数. 证明:**

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^3 + x_{i-1}x_i x_{i+1}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i x_{i+1}(x_i + x_{i+1})}$$

Lemma

Lemma

对任何非负实数 x,y, 我们有:

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\geq\frac{1}{1+xy}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\geq\frac{1}{1+xy}\\
\iff\ &(x^2+y^2+2x+2y+2)(1+xy)\geq(x^2+2x+1)(y^2+2y+1)\\
\iff\ &1+xy(x^2+y^2)\geq x^2y^2+2xy\\
\iff\ &xy(x^2-2xy+y^2)+(x^2y^2-2xy+1)\geq 0\\
\iff\ &xy(x-y)^2+(xy-1)^2\geq 0
\end{aligned}$$

□

回到原题，我们做如下变形：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^3+x_{i-1}x_ix_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^3(1+\frac{x_{i-1}}{x_i}\cdot\frac{x_{i+1}}{x_i})}$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i^3(1+\frac{x_{i-1}}{x_i})^2}+\frac{1}{x_i^3(1+\frac{x_{i+1}}{x_i})^2}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i(x_i+x_{i-1})^2}+\frac{1}{x_i(x_i+x_{i+1})^2}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_{i-1}(x_i+x_{i-1})^2}+\frac{1}{x_i(x_i+x_{i-1})^2}\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_ix_{i-1}(x_{i-1}+x_i)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_ix_{i+1}(x_i+x_{i+1})}$$

故原命题成立.

Problem4

Problem4

Problem4(50points)

给定正偶数 n, 对 $a_i \geq (1 \leq i \leq n)$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, 求

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} min\left\{(i-j)^2, (n+i-j)^2\right\} a_i a_j$$

的最大值.

Solution1

利用**组合思想** 来解决该题.
由于 n 是正偶数, 令 $n=2k$, 对 $1\le m\le k$ 我们利用均值不等式有:

$$\sum_{i=m}^{m+k-1} a_i \cdot \sum_{j=m+k}^{m+2k-1} a_j \le \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{k}\left(\sum_{i=m}^{m+k-1} a_i \cdot \sum_{j=m+k}^{m+2k-1} a_j\right) \le \frac{k}{4} \quad (\Psi)$$

展开 (Ψ) 式子左侧, 不难发现: 对于 $1\le i<j\le n$, a_ia_j 出现的次数为

$min\{i-j, n+i-j\}$ 次

Remark:①这里我们的下标均为 $mod \quad n$ 意义下的下标

Remark:②关于 a_ia_j 出现的次数计算结果分类

Solution1

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{k}\left(\sum_{i=m}^{m+k-1} a_i \cdot \sum_{j=m+k}^{m+2k-1} a_j\right) = \sum_{1\le i<j\le n} min\left\{i-j, n+i-j\right\} a_i a_j \le \frac{k}{4}$$

又 $min\left\{i-j, n+i-j\right\} \le k$ 故:

$min\left\{(i-j)^2, (n+i-j)^2\right\} = (min\left\{i-j, n+i-j\right\})^2 \le kmin\left\{i-j, n+i-j\right\}$

于是:

$$S = \sum_{1\le i<j\le n} min\left\{(i-j)^2, (n+i-j)^2\right\} a_i a_j$$

$$\le \sum_{1\le i<j\le n} kmin\left\{i-j, n+i-j\right\} a_i a_j \le \frac{k^2}{4} = \frac{n^2}{16}$$

$$\Rightarrow S_{max} = \frac{n^2}{16}$$

Solution2

利用<u>**复数思想**</u> 来解决该题.

设 $\theta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 为 n 次单位根, 令 $z = a_1\theta + a_2\theta^2 + \ldots + a_n\theta^n$
则

$$0 \le |z|^2 = z \cdot \bar{z} = (a_1\theta + a_2\theta^2 + \ldots + a_n\theta^n)(a_1\theta^{-1} + a_2\theta^{-2} + \ldots + a_n\theta^{-n})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2\cos\frac{2(j-i)\pi}{n} a_i a_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j - 4\sum_{1\le i<j\le n} \sin^2\frac{(j-i)\pi}{n} a_i a_j$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - 4\sum_{1\le i<j\le n} \sin^2\frac{(j-i)\pi}{n} a_i a_j = 1 - 4\sum_{1\le i<j\le n} \sin^2\frac{(j-i)\pi}{n} a_i a_j$$

Solution2

因此:

$$\sum_{1\le i<j\le n} \sin^2 \frac{(j-i)\pi}{n} a_i a_j \le \frac{1}{4}$$

我们只需要证明, 对所有的 $1 \le i < j \le n$ 都有:

$$\frac{n^2}{4}\sin^2 \frac{(j-i)\pi}{n} \ge min\left\{(i-j)^2,(n+i-j)^2\right\}$$

即需证明:

$$\sin \frac{(j-i)\pi}{n} \ge \frac{2}{n} min\{i-j,n+i-j\}$$

Reamrk: 这是由于 $min\left\{(i-j)^2,(n+i-j)^2\right\} = (min\{i-j,n+i-j\})^2 \le kmin\{i-j,n+i-j\} = \frac{n}{2}min\{i-j,n+i-j\}$

Solution2

由于 $\sin\frac{(j-i)\pi}{n}=\sin\frac{(n-j+i)\pi}{n}$, 由对称性:

我们只需考虑 $1\le i<j\le\frac{n}{2}=k$ 的情况即可

令 $\dfrac{j-i}{n}=x\le\dfrac{1}{2}$, 我们证明 $\sin(\pi x)\ge 2x$ 对 $\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 成立即可

令 $f(x)=\sin(\pi x)-2x\quad f'(x)=\pi\cos(\pi x)-2$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减且由零点存在性定理可知其存在唯一的零点, 故 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 先增后减

结合 $f(0)=f(\frac{1}{2})=0$ 可知 $f(x)\ge 0$ 对 $\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 成立

故原命题成立.

Thank you!