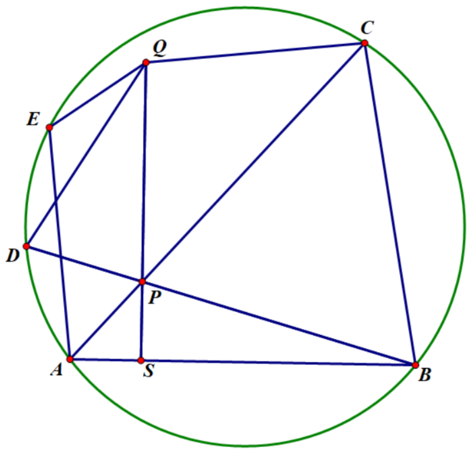
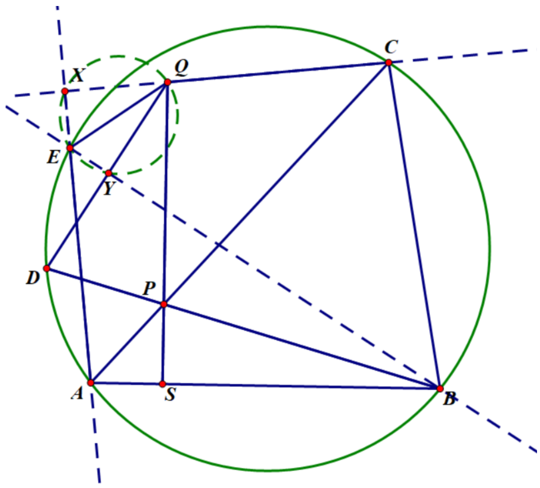
几何模拟测试解析

1 (本题满分 40 分)

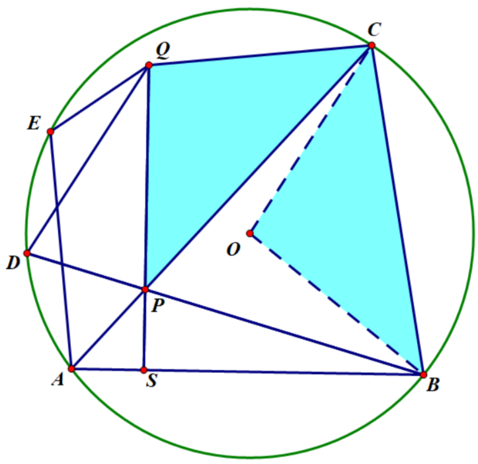
如图，在 ΔABC 中，$AC > BC$，ω 是外接圆，r 是其半径.P 是 AC 上的一点，使得 $BC = CP$，S 是 P 在 AB 上的投影，延长 BP 交 ω 于点 D.Q 是直线 SP 上一点，使得 $PQ = r$ 且 S, P, Q 以此顺序共线. 设点 E 满足 $AE \perp CQ$ 且 $BE \perp DQ$，求证：E 在 ω 上.

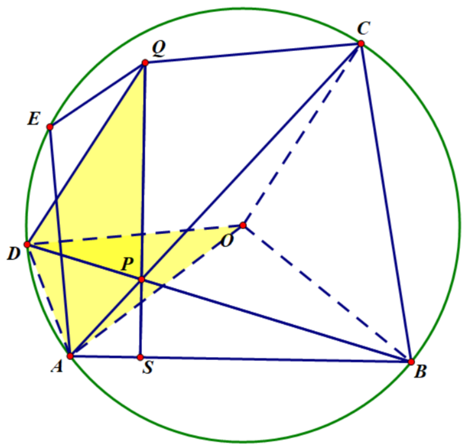




Solution1:

如下图，我们取 $\odot\omega$ 的圆心 O，连接 OC, OB，则 $\angle QPC = \angle APS = 90° - \angle CAB = \angle OBC$.
又 $\because QP = r = OB, PC = BC \quad \therefore \Delta QPC \cong \Delta OBC$
同理，我们连接 OD, OA, DA，则 $\angle QPD = \angle BPS = 90° - \angle DBA = \angle DOA$
又 $\because QP = r = OA, DP = DA \quad \therefore \Delta QPD \cong \Delta OAD$





$\Rightarrow \angle DQC = 360° - (\angle QCP + \angle CPQ + \angle QPD + \angle QDP = 360° - 2 \times (\angle QPD + \angle QPC) = 360° - 2 \times (180° - \angle CPB) = 2\angle CPB = 180° - \angle PCB$

由 $AE \perp CQ$ 且 $BE \perp DQ$ 我们可知 $\angle AEB = 180° - \angle DQC = \angle PCB = \angle ACB$

故 $ECBA$ 四点共圆，即 E 在 ω 上.

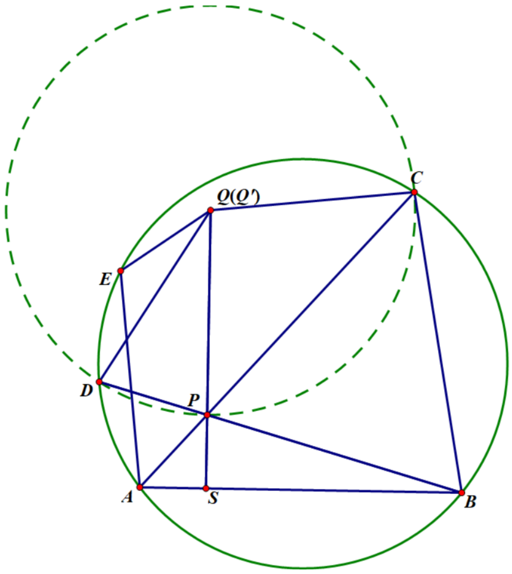
Solution2:

如下图，取 ΔDPC 外心 Q'，$\angle Q'PC = \dfrac{\pi}{2} - \angle CDP = \dfrac{\pi}{2} - \angle CAB = \angle APS$

$\Rightarrow Q', P, S$ 三点共线.

$\dfrac{CP}{\sin\angle CDP} = \dfrac{BC}{\angle CAB} = 2r \Rightarrow \odot Q'$ 的半径为 r，即 $Q'P = r$，故 $Q = Q'$.

剩余步骤与 **Solution1** 相同.



Solution3:

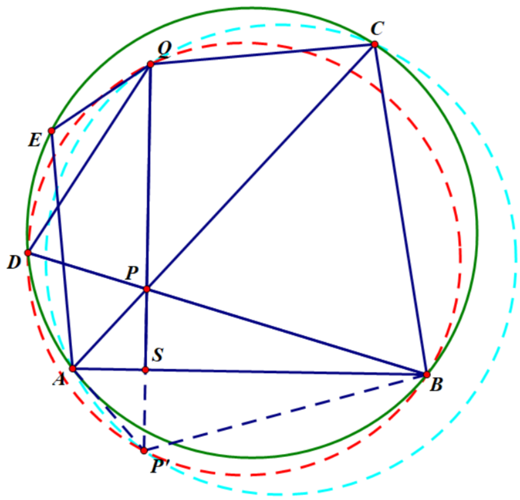
如下图，取 P 关于 AB 的对称点 P'，不难发现有：$\dfrac{PS\cdot PQ}{AP\cdot PC} = \dfrac{PS}{AP}\cdot\dfrac{PQ}{PC} = \sin A\cdot\dfrac{R}{BC} = \dfrac{1}{2}$

故：$PP'\cdot PQ = 2\cdot PS\cdot PQ = PA\cdot PC = PD\cdot PB$（相交弦定理）

$\Rightarrow D, Q, B, P'$ 四点共圆　同理我们有 C, Q, A, P' 四点共圆

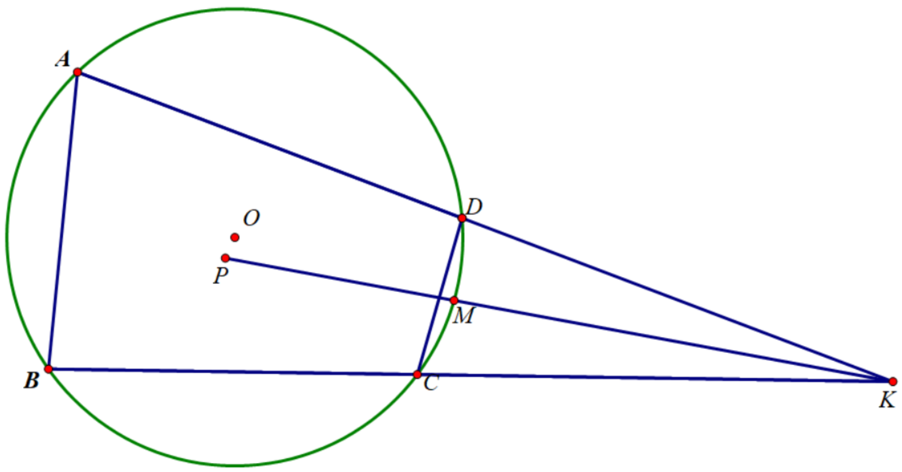
$\Rightarrow \angle DQC = \angle DQP' + \angle CQP' = \angle PBP' + \angle PAP' = 2(\angle PBA + \angle PAB) = 2\angle CPB = \pi - \angle ACB$

剩余步骤与 **Solution1** 相同.



2 (本题满分 40 分)

如图，在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD < \angle ADC.M$ 是不含 A 的弧 CD 的中点.P 是四边形 $ABCD$ 内一点，满足 $\angle ADB = \angle CPD$，$\angle ADP = \angle PCB$. 求证：直线 AD, BC, PM 交于一点.

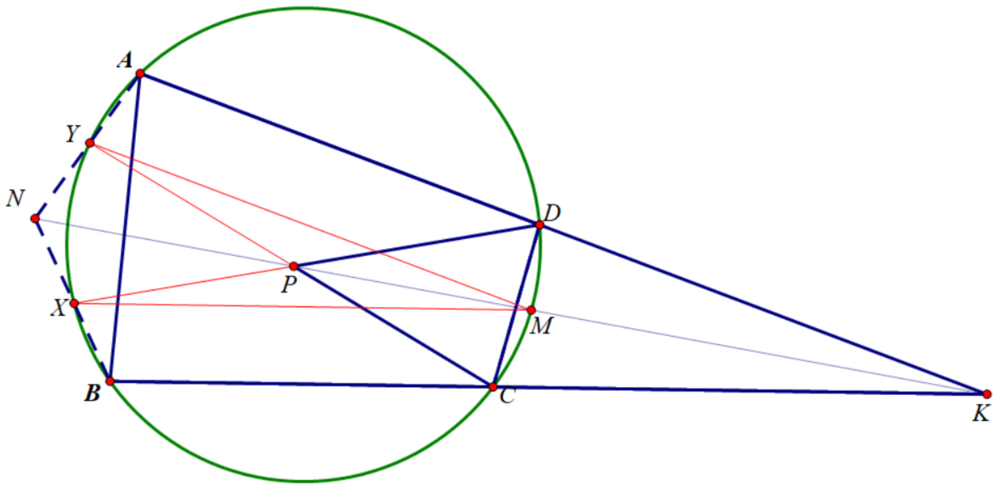


我们先来回忆一下证明共线的几种方法：

Menelaus Theorem | *Ceva Theorem* | *Pascal Theorem* | *Desargues Theorem.*

Solution1:（利用 **Pascal** 定理）

如下图，延长 DP 交 $\odot O$ 于点 X，延长 CP 交 $\odot O$ 于点 Y，连接 YM, XM，延长 AY、BX 交于点 N.



对圆内接六边形 $BCYADX$ 用 **Psacal 定理：**

$BC \cap AD = K, CY \cap DX = P, YA \cap BX = N$，即 N, P, K 三点共线.

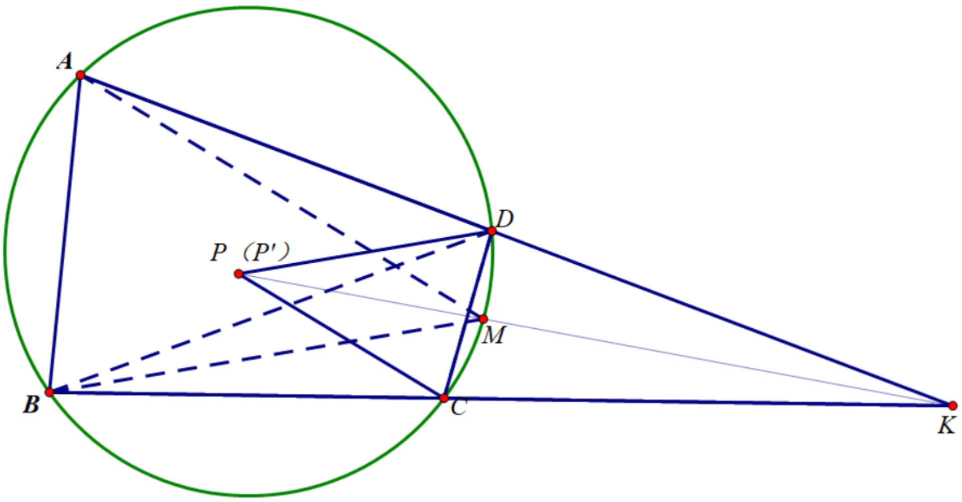
$\angle ADB = \angle CPD \Rightarrow \overset{\frown}{XY} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$

$\angle ADP = \angle PCB \Rightarrow \overset{\frown}{AX} = \overset{\frown}{BY} \Rightarrow \overset{\frown}{AY} = \overset{\frown}{BX}$

$\Rightarrow XY \parallel AB, XM \parallel BC, YM \parallel AD \Rightarrow \Delta AKB$ 与 ΔYMX 位似，且位似中心为 N

$\Rightarrow N, M, K$ 三点共线 $\Rightarrow N, P, M, K$ 四点共线，即：直线 AD, BC, PM 交于一点.

Solution2:（利用同一法）



作 $CP' \parallel AM$，$DP' \parallel BM$ 交于点 P'.

则 $\angle CP'D = \angle CP'M + \angle DP'M = \angle P'MB + \angle P'MA = \angle AMB = \angle ADB$

$\angle BCP' = \angle BMA - \angle CBM = \angle BMA - \angle DAM = \angle ADP'$，故 P 与 P' 重合.

设 PM 与 AD, BC 分别交于 K_1, K_2.

$\dfrac{PK_1}{K_1M} = \dfrac{PD}{DM} \cdot \dfrac{\sin\angle PDK_1}{\sin\angle MDK_1}, \dfrac{PK_2}{K_2M} = \dfrac{PC}{CM} \cdot \dfrac{\sin\angle PCK_2}{\sin\angle MCK_2}$

$\dfrac{PK_1}{K_1M} \cdot \dfrac{K_2M}{PK_2} = \dfrac{PD}{PC} \cdot \dfrac{\sin\angle MCK_2}{\sin\angle < MDK_1} = \dfrac{PD}{PC} \cdot \dfrac{BM}{AM}$

由于 $\Delta DPC \sim \Delta XPY \sim \Delta AMB, \dfrac{PD}{PC} = \dfrac{AM}{BM} \Rightarrow \dfrac{PK_1}{K_1M} = \dfrac{PK_2}{K_2M}$

故 $K_1 = K_2$，直线 AD, BC, PM 交于一点.

Remark: 我们也可以考虑用角元 $Ceva$ 定理来证明共线.

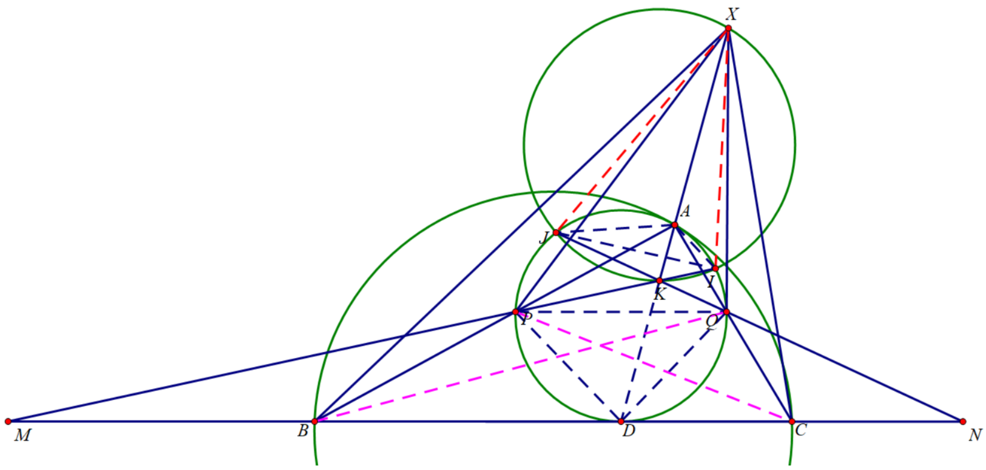
$\dfrac{\sin\angle DPM}{\sin\angle CPM} \cdot \dfrac{\sin\angle PCB}{\sin\angle DCB} \cdot \dfrac{\sin\angle CDA}{\sin\angle PDA} = \dfrac{DM}{CM} \cdot \dfrac{\sin\angle PDM}{\sin\angle PCM} \cdot \dfrac{\sin\angle CDA}{\sin\angle DCB}$

$= \dfrac{\sin\angle BMD}{\sin\angle AMC} \cdot \dfrac{\sin\angle CDA}{\sin\angle BCD} = 1$（这里我们利用了两组平行关系可得）

故：直线 AD, BC, PM 交于一点.

3 (本题满分 50 分)

如图，锐角 ΔABC 的外接圆为 ω.$\odot\Gamma$ 与 ω 内切于 A，且与 BC 切于点 D. 设直线 AB, AC 分别与 Γ 交于点 P, Q，点 M, N 在直线 BC 上，满足 B 是 DM 的中点，C 是 DN 的中点. 设直线 MP, NQ 交于点 K，且分别与 Γ 交于点 I, J，射线 KA 与 ΔIJK 的外接圆交于另一点 X. 求证：$\angle BXP = \angle CXQ$.



Solution1:

由两圆相切可知 $\Delta APQ \sim \Delta, PQ \parallel BC$

故有：$\angle ABD = \angle APQ = \angle ADQ, \angle ACB = \angle AQP = \angle ADP$

结合弦切角定理，我们有：$\angle ADB = \angle APQ, \angle ADC = \angle APQ$

$\Rightarrow \Delta ADQ \sim \Delta ABD, \Delta ADP \sim \Delta ACD$

$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD} \cdot \frac{\sin\angle AQK}{\sin\angle PQK} \cdot \frac{\sin\angle QPK}{\sin\angle APK} = \frac{\sin\angle CQN}{\sin\angle QNC} \cdot \frac{\sin\angle PMB}{\sin\angle MPB} = \frac{CN}{CQ} \cdot \frac{PB}{MB} = 1$$

$\Rightarrow K$ 在 AD 上，即：X, A, K, D 四点共线.

连接 $AI, IJ, AJ \Rightarrow \angle KMN = \angle KPQ = \angle IJK = \angle IXK \Rightarrow X, I, D, M$ 四点共圆

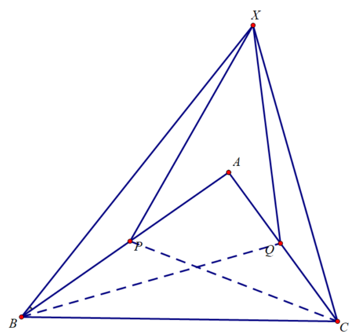
$\Rightarrow \angle PAD = \angle PID = \angle MXD \Rightarrow MX \parallel AB \Rightarrow A$ 为 AB 的中点

$\because \dfrac{PD}{DC} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AX}{AC}, \angle XAC = \pi - \angle DAC = \pi - \angle PDB = \angle PDC$

$\Rightarrow \Delta PDC \sim \Delta XAC$，同理：$\Delta BDQ \sim \Delta BAX$

$\Rightarrow \angle QBC = \angle XBA, \angle PCB = \angle QCX \Rightarrow P, Q$ 为 ΔXBC 的一组等角共轭点 (如下图)

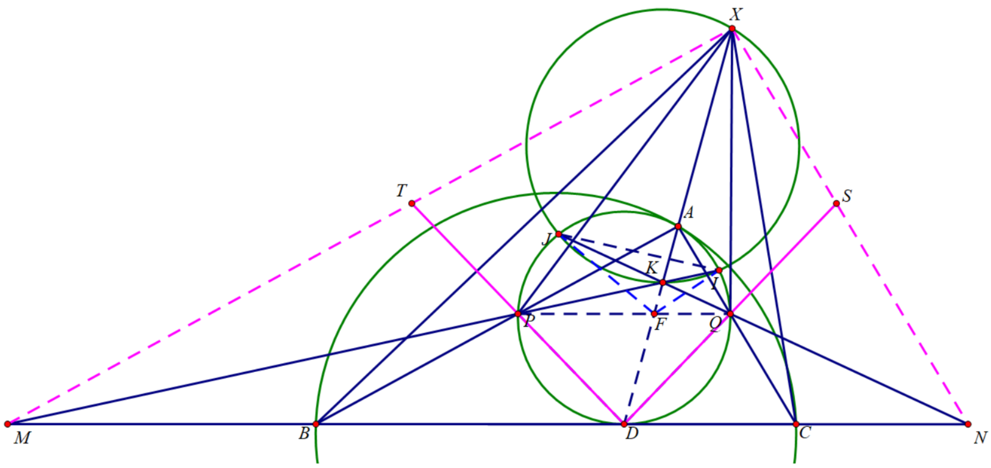
故有：$\angle BXP = \angle CXQ$



Solution2:

我们同样也是需要先证明:X, A, K, D 四点共线.（见 **Solution1**）

如图，我们连接 XM, XN, IJ，延长 DP 交 XM 于点 T，延长 DQ 交 XN 于点 S，记 F 为 PQ 与 XD 的交点，连接 FJ, FI.



Q 可看成直线 MBD 上的无穷远点，故 $\dfrac{MB}{BD} = \dfrac{M\bar{Q}}{\bar{Q}B} = 1$（这里 $\bar{Q}$ 是直线 MBD 上的无穷远点）

故 PM, PB, PD, PQ 为调和线束，而直线 PM 即为直线 PK，直线 PB 即为直线 PA，故 PD, PF, PK, PA 为调和线束

即 A, K, F, D 为调和点列，故有：$AK \cdot FD = AD \cdot KF$.

$\angle FQJ = \angle PIJ = \angle FXJ \Rightarrow J, F, Q, X$ 四点共圆　同理，我们也有 X, I, F, P 四点共圆.

$\Rightarrow KX \cdot KF = KJ \cdot KQ = KA \cdot KD \Rightarrow \dfrac{KX}{KA} = \dfrac{KD}{KF} \Rightarrow \dfrac{KA}{AX} = \dfrac{KF}{FD} = \dfrac{KA}{AD} \Rightarrow AX = XD.$

进而 ΔXMN 与 ΔABC 位似，位似中心为 D，位似比为 2.

故显然有 $DP = PT, DQ = QS$.

由于 $\angle XDS = \angle ABD = \angle XMD$，$\angle XDT = \angle ACB = \angle XND$

$\Rightarrow \Delta XDS \sim \Delta XMD, \Delta XDT \sim \Delta XND$

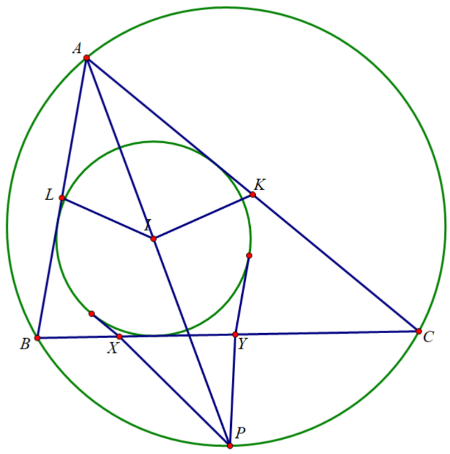
类似地：$\angle XDM = \angle AQD = \angle XSD \Rightarrow \Delta XDQ \sim \Delta XMB$ 同理：$\Delta XDP \sim \Delta XNC$.

$\Rightarrow \angle BXP = \angle MXD - \angle MXB - \angle DXP = \angle NXD - \angle DXQ - \angle NXC = \angle CXQ$

故综上：我们有 $\angle BXP = \angle CXQ$

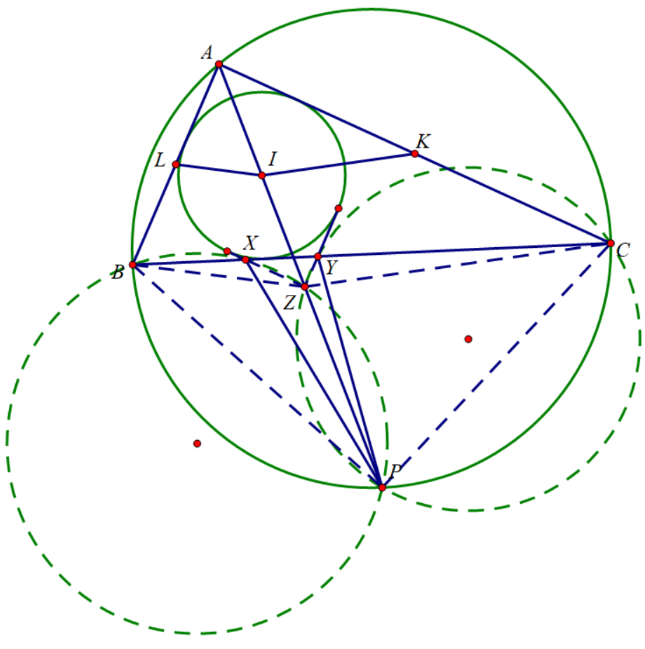
4 (本题满分 50 分)

如图，在 ΔABC 中，$AB < AC < BC$，内心为 I，内切圆为 ω. 点 X（异于点 C）在直线 BC 上，满足过 X 且平行于 AC 的直线与 $\odot\omega$ 相切. 点 Y（异于点 B）在直线 BC 上，满足过 Y 且平行于 AB 的直线与 $\odot\omega$ 相切. 设直线 AI 与 ΔABC 的外接圆交于另一点 P，K, L 分别为 AC, AB 的中点. 求证：$\angle KIL + \angle YPX = 180°$.



Solution1:

如图，我们作 A 关于 I 的对称点 Z，连接 XZ, YZ, ZB, ZC, PB, PC.



则 $XZ \parallel AC, YZ \parallel AB$，且 XZ, YZ 与内切圆相切

$\angle AZY = \angle ZAB = \angle PCY \Rightarrow P, C, Y, Z$ 四点共圆 $\Rightarrow \angle YPZ = \angle YCZ$

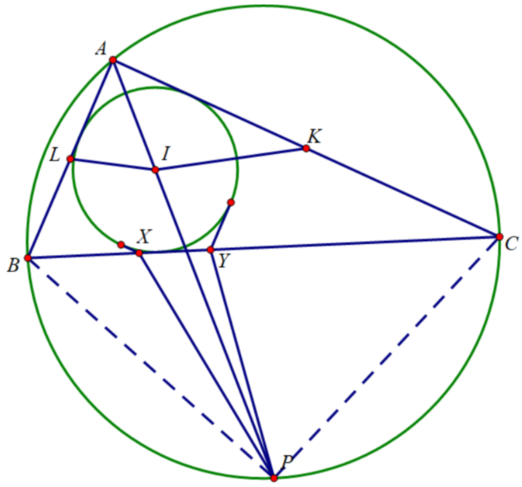
同理，P, B, X, Z 四点共圆 $\Rightarrow \angle XPZ = \angle XBZ$

故 $\angle YPX + \angle BZC = \angle ZBC + \angle ZCB + \angle BZC = 180°$

$\because AI + IZ, AL = LB \quad \therefore IL \parallel BZ$，同理 $IK \parallel CZ, KL \parallel BC$

由三组平行可知 $\Delta KIL \sim \Delta CZB \Rightarrow \angle BZC = \angle KIL \Rightarrow \angle KIL + \angle YPX = 180°$

Solution2:



事实上，我们只需证明 $\Delta CPX \sim \Delta ALI, \Delta BPY \sim \Delta AKI$ 即可.

Remark: 这里我们选择证明一组相似即可，另一组同理.

由于 $\angle LAI = \angle PCX$，故我们只需证明：$\frac{Al}{AI} = \frac{CP}{CX} \iff \frac{AL}{AI} \cdot \frac{CX}{CP} = 1$

而 $LHS = \frac{AL}{BP} \cdot \frac{CX}{Ai} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{BP} \cdot \frac{CI}{AI} \cdot \frac{CX}{CI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \angle ACB}{\sin \frac{\angle BAC}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\angle BAC}{2}}{\sin \frac{\angle ACB}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\angle ACB}{2}} = 1 = RHS$ 成立！（这里我们用到 $CI = CX \cdot \cos \frac{\angle ACB}{2}$）

故由 $\Delta CPX \sim \Delta ALI, \Delta BPY \sim \Delta AKI$ 可知：$\angle AIL = \angle PXY, \angle AIK = \angle PYX$

$\Rightarrow \angle KIL + \angle YPX = \angle YPX + \angle PXY + \angle PYX = 180°$

故：$\angle KIL + \angle YPX = 180°$.