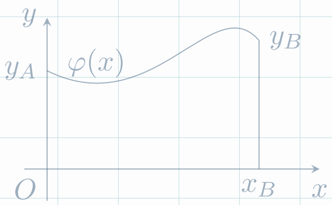


19/10/2024

Analysis

Complex Analysis

(First Edition)

Sherr1

$$
\begin{aligned}
i\hbar\partial_t\psi(\boldsymbol{r},t) &= H\psi(\boldsymbol{r},t) \\
&= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}
$$

Nankai University

(♠)*nkuSherr1@gmail.com*

1 First Class(24.10.19)

1.1 全纯函数列

逐点收敛、一致收敛、紧一致收敛

Definition 1.1 一致收敛

在 D 上**一致收敛**：$\forall \epsilon > 0$，$\exists N$,$\forall n > N$，$\forall z \in D$，$|f_n(z) - f(z)| < \delta$，记作 $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$.

Definition 1.2 紧一致收敛

在 D 上**紧一致收敛**：$\forall F \in D$，F' 紧集，都有 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 D 上一致收敛.

Example 1.1 紧一致收敛但非一致收敛

考虑：$f_n(z) = z^n$，$D = \{z||z| < 1\}$ **为开集**，$\{f_n(z)\}$ 在 D 上不一致收敛.

$\epsilon_0 = \dfrac{1}{2}$，$\forall N \in \mathbb{Z}^+$，取一个 $|z| < 1$，$|z^n| \geq \epsilon_0$ 不一致收敛.

考虑任一紧集 $F \subseteq D$，$\exists r \in (0,1)$ 使 $\overline{B(0,r)} \supseteq F$

事实上 $f_n(z)$ 在 F 上一致收敛，$|z| \leq r < 1$，$\forall \epsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{Z}^+$，使 $r^n < \epsilon$，$|f_n(z)| = |z|^n \leq r^n < \epsilon$

$\Rightarrow \{f_n(z)\}$ 在 F 上一致收敛 $\Rightarrow \{f_n(z)\}$ 在 D 上紧一致收敛.

Theorem 1.1

$\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty} \in H(\Omega)$，$\{f_n(z)\}$ 紧一致收敛于 f，则 $f \in H(\Omega)$.

Proof 由 *Morera* 定理，我们只需证明对任意闭路径 $\Gamma \in \Omega^o$ 都有

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

而

$$\{f_n(z)\} \in H(\Omega) \Rightarrow \int_{\Gamma} f_k(z)dz = 0 \, (\forall k \in \mathbb{Z}^+)$$

又 $\{f_n(z)\}$ 在 Γ 上紧一致收敛于 f

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma} f_n(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz \left(\int_{\Gamma} |f_n(z) - f(z)| \, dz \to 0 \right) \Rightarrow f(z) \in H(\Omega)$$

故：$f(z) \in H(\Omega)$. □

Theorem 1.2

在 *Theorem*1.1 条件下，$\left\{f_n^{(k)}(z)\right\}$ 也在 Ω 上紧一致收敛于 $f^{(k)}(z)$. $(k \in \mathbb{N})$

Analysis $\left|f_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)\right| \leftrightarrow |f_n(z)-f(z)|$

$F(z)=f_n(z)-f(z)$，在紧集上估计 $F^{(k)}(z)$，建立 $\sup\limits_{z\in C}\left|f^{(k)}(z)\right|$ 与 $\sup\limits_{z\in C}|f(z)|$ 之间的关系.

取 $C:\{z_0||z_0-z|\le\delta\}$(C:Compact subset of Ω) C 紧集，每个元素都离 $\partial\Omega$ 有距离. □

Proof 令 $F(z)=f_n(z)-f(z)\in H(\Omega)$

$$\left|F^{(k)}(z)\right|=\left|\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{F(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi\right|\le\frac{k!}{2\pi i}\frac{\sup\limits_{z\in C}|F(z)|}{\delta^{k+1}}\cdot 2\pi\delta=\frac{k!}{\delta^k}\sup_{z\in C}|F(z)|$$

由 $f_n(z)\rightrightarrows f(z)$ 知：$n\to\infty$ 时

$$\sup_{z\in C}|F(z)|\to 0$$

$\Rightarrow f_n^{(k)}(z)$ 在 Ω 上紧一致收敛于 $f^{(k)}(z)$. □

Theorem 1.3 (按照积分定义全纯函数)

$f(z)=\int_0^1F(z,s)ds$ ①固定 s，$F(z,s)$ 关于 z 全纯 ②$F(z,s)\in C(\Omega\times[0,1])$ 则有 $f\in H(\Omega)$.

Proof *法 1*：由 *Morera* 定理，只需证明对 Ω 中的闭路径 Γ 有：$\int_\Gamma f(z)dz=0$

$$0=\int_\Gamma\int_0^1F(z,s)dsdz=\int_0^1(\int_\Gamma F(z,s)dz)ds\xlongequal[\text{Cauchy 定理}]{\text{由①}}0$$

故由 *Morera* 定理，我们可知：$f\in H(\Omega)$. □

Proof *法 2*：令 $f_n(z)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^nF(z,\frac{k}{n})\in H(\Omega)$(Riemann 逼近)

我们只需证明 $f_n(z)$ 在 Ω 上紧一致收敛于 $f(z)$，进而由 *Theorem*1.1 可知 $f\in H(\Omega)$

对于 $\forall\Omega$ 上的紧集 C

$$\begin{aligned}|f_n(z)-f(z)|&=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^nF(z,\frac{k}{n})-\int_0^1F(z,s)ds\right|\\&=\left|\sum_{k=1}^n\int_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(F(z,\frac{k}{n})-F(z,s))ds\right|\le\sum_{k=1}^n\int_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|F(z,\frac{k}{n})-F(z,s)\right|ds(\clubsuit)\end{aligned}$$

$F(z,s)$ 在紧集 C 上一致收敛，$\forall\epsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{Z}^+$，$\forall n>N$ 都有

$$d((z_1,s_1),(z_2,s_2))<\frac{1}{n}\text{时}:|F(z_1,s_1)-F(z_2,s_2)|<\epsilon$$

代入 $(\clubsuit)$，则 $n>N$ 时

$$|f_n(z)-f(z)|\le\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\epsilon ds=\epsilon$$

$\Rightarrow f_n(z)$ 紧一致收敛于 $f(z)$，进而由 $Theorem1.1 \Rightarrow f \in H(\Omega)$. □

1.2 幂级数 (初初步)

Theorem 1.4

任意幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$，$\exists 0 < R < +\infty$ 使

$$(i)\,|z| < R\text{时}\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\text{绝对收敛}\quad (ii)\,|z| > R\text{时}\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\text{发散}$$

其中

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{a_n}$$

Theorem 1.5

$f \in H(\Omega)$,D : z_0 为中心的一个圆盘 $\bar{D} \in \Omega$,则 f 在 z_0 上展成幂级数 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n (z \in D)$

对 $\forall n \geq 0$ 有

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(C = \partial D)$$

Proof 由柯西积分公式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0}\frac{\xi - z_0}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi - z_0}}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left((\frac{1}{2\pi i})\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi\right)(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \end{aligned}$$

故

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

□

Theorem 1.6 零点孤立性

f 在连通开集 Ω 上全纯，$z_0 \in \Omega$ 为 f 的零点，f 在 Ω 上不恒为 0，$\exists z_0$ 邻域 $U \subset \Omega$、U 上非零函数 g 及唯一 $n \in \mathbb{Z}^+$ 使对 $\forall z \in U$

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)(n:\text{零点的阶数})$$

Proof Ω 连通，$\forall z_0$，$\exists z_0$ 的某个邻域 U，f 在 z_0 的邻域 U 上恒不为 0；

对于 $z \in U$，我们有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \xlongequal{\text{最小使}a_n\neq 0\text{的}n} (z-z_0)^n(a_n+a_{n-1}(z-z_0)+...) := (z-z_0)^n g(z)$$

其中，z 离 z_0 充分近时，$g(z)\neq 0$；换言之，z 在 z_0 的一个小邻域内有 $g(z)\neq 0$

若不唯一，则有

$$f(z)=(z-z_0)^n g(z)=(z-z_0)^m h(z)$$

不妨设 $m>n$，则

$$g(z)=(z-z_0)^{m-n}h(z)$$

当 $z\to z_0$ 时

$$g(z)\to 0$$

矛盾！ □

Exercise 1.1

设 $f\in H(\mathbb{C})$，$\forall z_0\in\mathbb{C}$，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$，系数 c_n 至少由一个为 0.

证明：f 为多项式.

Solution 若 $\exists n$，$f^{(n)}(z)\equiv 0$ 则 f 为多项式. ($c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$)

对 $\forall n$，$f^{(n)}(z)=0$ 的根至多可数 (否则与零点孤立性矛盾！)

$S=\bigcup_{k=0}^{\infty}\left\{z\in C|f^{(k)}(z)=0\right\}$ 至多可数；

由题意知，$\forall z\in\mathbb{C}$，$\exists n$ 使 $f^{(n)}(z)=0$

$$\Rightarrow C\subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty}\left\{z\in C|f^{(k)}(z)=0\right\}$$

这与 S 的至多可数性矛盾！

故 f 为多项式. □

1.3 奇点

Definition 1.3 奇点

$$\begin{cases} \textbf{可去奇点}\text{：可以全纯延拓} \\ \textbf{极点}\text{：如 } f(z)=\dfrac{1}{z} \text{ 在 } z=0 \text{ 处附近无界} \\ \textbf{本性奇点}\text{：有界，不能全纯延拓（振荡）} \end{cases}$$

1.3.1 可去奇点

Theorem 1.7 可去奇点的 Riemann 定理

f 在开集 Ω 上除 z_0 无定义以外都全纯，若 f 在 $\Omega\backslash\{z_0\}$ 有界，则 z_0 为 f 的**可去奇点**.

Proof 取 $D: z_0$ 为圆心的圆盘，$C: \partial D$ 取正方向

由 $Theorem 1.3$ 只需证明

$$\forall z \neq z_0,\ f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\xi}{\xi - z}dz(z\in D)(\clubsuit)$$

由多联通域上的柯西积分定理有

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi + \int_{\gamma_{\epsilon'}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = 0$$

由 Cauchy 积分公式

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\epsilon'}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi()$$

估计

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \leq \frac{\sup\limits_{\xi\in\gamma_\epsilon}|f(\xi)|}{\inf\limits_{\xi\in\gamma_\epsilon}|\xi - z|}\cdot 2\pi\epsilon \to 0(\epsilon\to 0^+)$$

$\Rightarrow (\clubsuit)$ 成立，由 $Theorem 1.3$ 知 z_0 为可去极点. □

Remark 其中 γ_ϵ 和 γ'_ϵ 分别表示以 z 和 z_0 为中心，ϵ 为半径的两个小圆周，方向取负方向. □

1.3.2 极点 (看成 $\frac{1}{f}$ 的零点)

Corollary 1.1

$$z_0\text{为}f\text{极点} \iff z\to z_0\text{时}: |f(z)|\to\infty$$

Proof “$\Rightarrow$”: z_0 为 $\dfrac{1}{f}$ 的零点，$z\to z_0$ 时，$|f(z)|\to +\infty$

"$\Leftarrow$"：若 $z\to z_0$ 时 $|f(z)|\to+\infty$

$\frac{1}{f}\to 0(z\to z_0)$，$\frac{1}{f}$ 在 0 附近有界 $\xrightarrow{Theorem1.7}$ z_0 为 $\frac{1}{f}$ 的可去奇点 $\Rightarrow z_0$ 为极点. □

Theorem 1.8

z_0 为 f 的极点，在 $Theorem1.6$ 条件下

$$\frac{1}{f}=(z-z_0)^n g(z)\Rightarrow f(z)=(z-z_0)^{-n}G(z)$$

其中 $G(z)$ 全纯

Theorem 1.9

$Theorem1.8$ 中

$$\begin{aligned} f(z)&=(z-z_0)^{-n}(b_0+b_1(z-z_0)+...+b_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+H(z)(z-z_0)^n)\\ &=\frac{b_0}{(z-z_0)^n}+\frac{b_1}{(z-z_0)^{n-1}}+...+\frac{b_n}{z-z_0}+H(z)\\ &:=\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{a_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}}+...+\frac{a_1}{z-z_0}+H(z) \end{aligned}$$

Theorem 1.10

包含 z_0 的闭路径 Γ

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z)dz&=\int_\Gamma\left(\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{a_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}}+...+\frac{a_1}{z-z_0}+H(z)\right)dz\\ &=\int_\Gamma\frac{a_{-1}}{z-z_0}dz=2\pi i a_{-1} \end{aligned}$$

其中 a_{-1} 称为 f 在该极点的**留数**，记作 $Res(f,z_0)$.

Example 1.2 怎么求留数

$n=1$

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+H(z),\ a_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

对于普遍的 n

$$(z-z_0)^n f(z)=a_{-n}+a_{-(n-1)}(z-z_0)+...+a_{-1}(z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^n H(z)$$

$$a_{-1}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}((z-z_0)^n f(z))$$

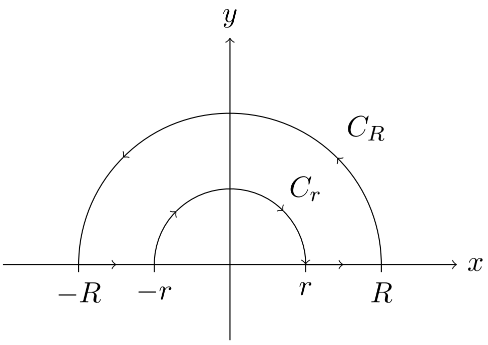
$$f(z)=(z-z_0)^{-n}G(z)\Rightarrow(z-z_0)^n f(z)=\underbrace{g(z)}_{holomophic}$$

Exercise 1.2 利用留数算积分

证明
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

Solution (围道积分法))

令 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$，考虑如下的围道：



由柯西积分定理
$$\int_{-R}^{-r}+\int_r^R+\int_{C_r}+\int_{C_R}=0(\clubsuit)$$
$$\int_{C_r}=-\int_0^{\pi}\frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta=-i\int_0^{\pi}e^{ir\theta}d\theta\xrightarrow{r\to0^+}-\pi i$$
$$\left|\int_{C_R}\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta\right|=\left|i\int_0^{2\pi}e^{iR\theta}d\theta\right|=\left|i\int_0^{2\pi}e^{R(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta\right|$$
$$\le\int_0^{2\pi}e^{-R\sin\theta}\left|e^{iR\cos\theta}\right|d\theta=\int_0^{2\pi}e^{-R\sin\theta}d\theta\to0(R\to+\infty)$$

另一面
$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{iz}}{z}+\int_r^R\frac{e^{iz}}{z}=\int_{-R}^{-r}\frac{\cos z+\sin z}{z}dz+\int_r^R\frac{\cos z+\sin z}{z}dz=2i\int_r^R\frac{\sin z}{z}dz$$

令 $R\to+\infty$，$r\to0+$，结合 ($\clubsuit$) 可知
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{-(-\pi i)}{2i}=\frac{\pi}{2}$$

故
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

□

Remark 选择合适的周线 (圆 [挖孔]、矩形)！ □

Exercise 1.3 利用留数算积分

证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh \pi x} dx = \frac{1}{\cosh \pi\xi}$$

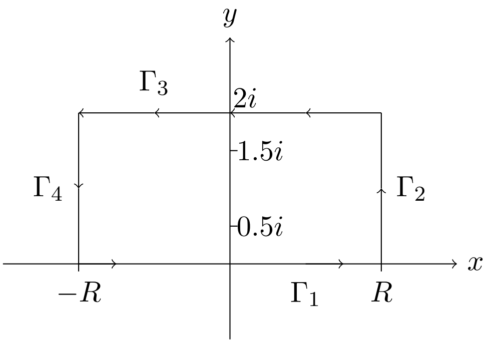
其中

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Solution 令 $f(z) = \dfrac{e^{-2\pi i z\xi}}{\cosh \pi z}$，$\cosh \pi x = 0$

$$\Rightarrow e^{\pi x} + e^{-\pi x} = 0 \Rightarrow x = \frac{i}{2} \; or \; \frac{3i}{2}$$

我们取分母周期为 $2i > \max\left\{\frac{i}{2}, \frac{3i}{2}\right\}$，考虑如下的围道：



$$\lim_{z\to\frac{i}{2}} (z - \frac{i}{2}) f(z) = \lim_{z\to\frac{i}{2}} (z - \frac{i}{2}) \frac{2e^{-2\pi i z\xi}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} = e^{2\pi i z\xi} \frac{2(z - \frac{i}{2})}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} = \frac{e^{\pi\xi}}{\pi i}$$

同理

$$\lim_{z\to\frac{3i}{2}} (z - \frac{3i}{2}) f(z) = -\frac{e^{3\pi\xi}}{\pi i}$$

由留数定理可知

$$\left(\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4}\right) f(z)dz = 2(e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi}) \quad (\clubsuit)$$

其中记我们想要的 $\displaystyle\int_{\Gamma_1} = I$

$$\int_{\Gamma_1} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh \pi x} dx \to I(R \to +\infty)$$

$$\int_{\Gamma_3} = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{-2\pi i(x+2i)\xi}}{\cosh \pi x} dx = e^{4\pi\xi} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh \pi x} dx \to e^{4\pi\xi} I(R \to +\infty)$$

$$\left|\int_{\Gamma 2}\right| = \left|\int_0^2 i \frac{e^{-2\pi(ix+R)\xi}}{\cosh \pi(ix+R)} dx\right| \le \int_0^2 \left|\frac{2e^{-2\pi x\xi}}{e^{\pi i x} + e^{-\pi i x}}\right| dx$$

$$|cosh\pi x| = \frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{2} \geq \frac{1}{2}\left|e^{\pi x}-e^{-\pi x}\right| \geq \frac{1}{2}(e^{\pi R}-e^{-\pi R}) \to +\infty$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\Gamma 2}\right| \to 0(R \to= \infty)$$

同理

$$\left|\int_{\Gamma 4}\right| \to 0\,(R \to= \infty)$$

令 $R \to +\infty$ 并结合 (♣) 可得

$$(1-e^{4\pi\xi})I = -2e^{2\pi\xi}(e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi}) \Rightarrow I = \frac{2(e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi})}{e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi}e^{\pi\xi}+e^{-\pi\xi}} = \frac{2}{e^{\pi\xi}+e^{-\pi\xi}} = \frac{1}{\cosh\pi\xi}$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh\pi x}dx = \frac{1}{\cosh\pi\xi}$$

□

2 Second Class(24.10.26)

2.1 本性奇点

Theorem 2.1 Casorati Weierstrass 定理

$f \in H(D_r(z_0)\backslash\{z_0\})$，$z_0$ 为**本性奇点**，则 f 在 $D_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ 的像在复平面稠密.

Remark 在本性奇点附近震荡——*Picard* 定理. □

Proof 反证 若不稠密，则 $\exists\omega, \exists\delta > 0$ 使

$$\forall 0 < |z - z_0| < \delta,\ |f(z) - \omega| \geq \epsilon_0$$

令

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \omega}, |g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon_0}(\forall z \in D_\delta(z_0)\backslash\{z_0\}$$

下面我们来讨论 $f(z) - \omega$ 在 z_0 的极点情况：

①$f(z) - \omega$ 在 z_0 全纯 $\Rightarrow$ z_0 为可去奇点，矛盾！

②否则必有 $f(z) - \omega \to +\infty(z \to z_0)z_0$ 为极点，矛盾！

故 f 在 $D_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ 的像在复平面稠密. □

Example 2.1

任何单射整函数都为线性函数 (可表示为 $f(z) = az + b \quad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$)

Proof 考虑 $f(\frac{1}{z})$ 的奇点 ($\frac{1}{\infty} = 0$)，假设 $f(\frac{1}{z})$ 在 0 处为极点

令

$$G(z) = f(\frac{1}{z}) = \frac{a_{-k}}{z^k} + ... + \frac{a_{-1}}{z} + G_0(z)$$

其中 $G_0(z)$ 全纯，

$$f(z) = a_k z^k + ... + a_1 z + C \xrightarrow{\text{单射}} \text{多项式}$$

故只需考虑是可去奇点还是本性奇点的情形：

①$f(\frac{1}{z})$ 在 0 处为可去奇点：

f 在 ∞ 处补充定义为 c，f 在有界区域有界 M，此时

$$f \leq \max\{c, M \to\}$$

故 f 有界 $\xrightarrow{Liouville}$ f 恒为常数，与 f 单射矛盾！

②$f(\frac{1}{z})$ 在 0 处为本性奇点：

取一个圆盘 $D_\delta(0)$，取圆盘外点 z_0

由开映射定理可知

$$\exists\delta_0>0\,s.t.\,B_{\delta_0}\left(f(\frac{1}{z_0})\right)\in f(\mathbb{C})$$

令 $B_{\delta_1}(z_0)\cap D_\delta(0)=\phi$ 根据 $Casorati-Weierstrass$ 定理，我们可知 f 在 $D_\delta(z_0)\backslash\{z_0\}$ 也能取到 $B_{\delta_1}\left(f(\dfrac{1}{z_0})\right)$ 中的点与 f 单射矛盾！ □

Definition 2.1 亚纯函数

f 在 Ω 上亚纯 $\iff\exists\{z_0,z_1...\}$ 在 Ω 上没有极限点使得

$$(i)f\in H\left(\Omega\backslash\{z_0,z_1...\}\right)\quad(ii)\,\{z_0,z_1...\}\text{为}f\text{的极点}.$$

延拓的复平面上讨论亚纯函数

Definition 2.2 延拓复平面上的全纯函数

定义在复平面上的亚纯函数 $f,F(z)=f(\dfrac{1}{z})$，F 在 0 处有可去奇点/极点，称 f 是延拓复平面上的**全纯函数**.

Theorem 2.2

延拓复平面上的全纯函数是有理函数.

Proof $\begin{cases}\text{复平面上的极点}z_1,z_2,...,z_n\\ f\text{在}0\text{处}\to(\text{极点/可去奇点})z_\infty\end{cases}$

Claim f 有限部分极点至多有限个，若不然由 $Casorati-Weierstrass$ 定理可知存在极点列的收敛子列，且极限点 $\in\mathbb{C}$，与零点的孤立性矛盾！ □

z_k 附近

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_k)^m}+...+\frac{a_{-1}}{z-z_k}+G_k(z)=f_k(z)+G_k(z)$$

其中 $f_k(z)$ 为有理函数 (主部)，$G_k(z)$ 为全纯函数，$f-\sum\limits_{k=1}^n f_k$ 在每个 z_k 附近有界 $\to$ 整函数

①考虑 $1\le k\le n$，$f(z)=f_k(z)+g_k(z)\to z_k$ 附近全纯 ($f_k(z)$ 主部，有理函数)

②

$$G(z)=f(\frac{1}{z})=\frac{a_l}{z_l}+...+\frac{a_{-1}}{z}+G_\infty(z)=\widetilde{f_\infty}(z)+\widetilde{g_\infty}(z)$$

$$f(z)=a_lz^l+...+a_{-1}z+G_\infty(\frac{1}{z}),\;f_\infty(z)=\widetilde{f_\infty}(\frac{1}{z})$$

$h=f-\sum\limits_{k=1}^n f_k-f_\infty\to$ 整函数 $\xrightarrow{Liouville}h$ 为常数 $\Rightarrow f=c+\sum\limits_{k=1}^n f_k+f_\infty$ 为有理函数. □

Remark (★) 重要思想：把无穷远看成一个点去考虑证明. □

Exercise 2.1 留数计算级数求和

假设 u 不为整数，证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(u+n)^2}=\frac{\pi^2}{(\sin\pi u)^2}\quad(u\in\mathbb{C})$$

Solution 考虑构造 $f(z)=\dfrac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}$(这样构造能使 $f(z)$ 的所有极点为所有整数和 u)

$$res_n f=\pi\lim_{z\to n}(z-n)\frac{\cot\pi z}{(u+n)^2}=\frac{\pi}{(u+n)^2}\cdot\lim_{z\to n}(z-n)\cot\pi z=\frac{1}{(u+n)^2}$$

$$res_{-u}f=\lim_{z\to n}\frac{d}{dz}(\pi\cot\pi z)=-\frac{\pi^2}{(\sin\pi u)^2}$$

取一个圆心为原点的圆

$$|z|=N+\frac{1}{2},N>|u|$$

其中 $[-N,N]\in\left\{z||z|\le N+\dfrac{1}{2}\right\}$，所有极点 $\{-N,...,N,-u\}$，故有

$$2\pi i\left(\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{(u+n)^2}-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi u)}\right)=\int_{D_N}\frac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}$$

只需

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{D_N}\frac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}dz=0$$

而

$$\begin{aligned}\left|\int_{D_N}\frac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}dz\right|&=\left|\int_0^{2\pi}\frac{\pi\cot\pi(N+\frac{1}{2})e^{i\theta}}{(u+(N+\frac{1}{2})e^{i\theta})^2}(N+\frac{1}{2})e^{i\theta}id\theta\right|\\&\le\int_0^{2\pi}\frac{N+\frac{1}{2}}{(N+\frac{1}{2}-u)^2}\pi\cot\pi(N+\frac{1}{2})e^{i\theta}d\theta\to 0\,(N\to+\infty)\end{aligned}$$

故

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{D_N}\frac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}dz=0$$

进而有原命题成立，即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(u+n)^2}=\frac{\pi^2}{(\sin\pi u)^2}\quad(u\in\mathbb{C})$$

□

2.2 辐角原理

Theorem 2.3 辐角原理

f 在包含圆周 C 及内部的开机上亚纯，f 在圆周 C 上没有极点/零点，那么：

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \cdot \left[f\text{在}C\text{内部零点个数 (含重数)} - f\text{在}C\text{内部极点个数} \right]$$

Proof 由辐角函数的定义，我们有：

$$\log f(z) = |\log f(z)| + i \arg f(z)$$

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z), \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-z_0)^{n-1}g(z) + (z-z_0)^n g'(z)}{(z-z_0)^n g(z)} = \frac{n}{z-z_0} + \frac{g(z)}{g'(z)}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \cdot n$$

n 阶极点在曲线内部：

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z-z_0} + H(z) \quad \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = -2\pi i \cdot n$$

$$f(z) = (z-z_1)^{m_1}...(z-z_k)^{m_k} \cdot (z-\omega_1)^{-n_1}...(z-\omega_s)^{-n_s} g(z) \quad (m_1, ..., m_k, n_1, ...n_s \in \mathbb{N}^+)$$

其中 $(z-\omega_1)^{-n_1}...(z-\omega_s)^{-n_s}$ 全纯，$g(z)$ 全纯且局部非 0

下面我们考虑：$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z}dz$

$$\frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \frac{f_1' f_2 + f_1 f_2'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}$$

由归纳法我们有：

$$\frac{(f_1...f_n)'}{f_1...f_n} = \sum_{k=1}^n \frac{f_k'}{f_k}$$

故

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^k \frac{[(z-z_i)^{m_i}]'}{(z-z_i)^{m_i}}dz + \sum_{j=1}^s \frac{[(z-z_j)^{n_j}]'}{(z-z_j)^{n_j}}dz$$

$$\Rightarrow 2\pi i \left[\text{零点个数(含重数)} - \text{极点个数} \right] = 2\pi i \sum_{i=1}^k m_i - 2\pi i \sum_{j=1}^s n_j = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

□

2.3 Rouche 定理

Theorem 2.4 Rouche 定理

f,g 定义在包含圆周 C 及其内部开集上的全纯函数，$\forall z\in C$ 有 $|f(z)|>|g(z)|$

则 f 和 $f+g$ 在圆周内部有相同的零点数.

Proof 对于 $t\in(0,1)$，我们定义：

$$f_t(z)=f(z)+tg(z)\Rightarrow f_t(z)\neq 0(\forall z\in\mathbb{C})\quad \text{s.t.} f_0=f, f_1=f+g$$

记 n_t 为 f_t 在 C 内部的零点个数，而由 $f_t(z)\neq 0(\forall z\in\mathbb{C})$ 可知 $f(z)$ 在 C 上无零点，故由辐角原理我们可知：

$$n_t=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_t'(z)}{f_t(z)}dz(\text{只取自然数})$$

故 n_t 关于 t 连续，但只取自然数，故 n_t 恒为常数，故 $n_0=n_1$，即：f 和 $f+g$ 在 C 内部有相同的零点数. □

Exercise 2.2

$f:u\to v$ 全纯单射，证

$$\forall z\in u,\ f'(z)\neq 0$$

Solution 假设 $f'(z_0)=0$，z_0 附近点 z：

$$f(z)=f(z_0)+c(z-z_0)^k+G(z)\quad (k\geq 2)$$

其中 $G(z)$ 为高阶无穷小

$$\underbrace{f(z)-f(z_0)-\omega}_{\text{至多一个零点}}=F(z)+G(z)$$

其中

$$F(z)=\underbrace{c(z-z_0)^k-\omega}_{\text{至少}k\text{个}>1\text{个}}$$

取 z_0 的小邻域 D 使得

$$|F(z)|>|G(z)|$$

进而由 *Rouche* 定理，可知 F 与 $F+G$ 在这个小邻域 D 内的零点个数相同

由于 f 单射，故 D 上 $F+G=f(z)-f(z_0)-\omega$ 的零点至多一个

而 $F=c(z-z_0)^k-\omega$ 的零点至少有 k 个且 $k\geq 2$ 矛盾！

综上：$f'(z)\neq 0$.

□

Exercise 2.3 代数基本定理

n 次多项式一定有 n 个复数根.

Solution 最大模原理/*Liouville* 定理 $\Rightarrow$ 至少有一个根.

令 $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$，将圆盘取足够大时 (即 $|z|$ 足够大时)，有：

$$|a_n z^n| > \left|a_{n-1} z^{n-1+...+a_1 z + a_0}\right|$$

故由 *Rouche* 定理我们可知：对于足够大的圆盘 C，f 在 C 内部的零点个数 $=a_n z^n$ 在 C 内部的零点个数即为 n □

2.4 开映射定理

Theorem 2.5 开映射定理

f 是 Ω 上的全纯函数，且它不是常数，那么它是一个开映射.

Proof 记 $f(z_0) = \omega_0$

$\exists \omega_0$ 的一个邻域 $B_\delta(\omega_0)$ 使 $\forall \omega \in B_\delta(\omega_0)$，$\exists \delta_1$ 使在 $B_{\delta_1}(z_0)$ 上 $f(z) - \omega$ 有零点.

考虑

$$f(z) - \omega = \underbrace{f(z) - \omega}_{F(z)} + \underbrace{\omega - \omega_0}_{G(z)}$$

选取 $\delta > 0, \{z \,|\, |z - z_0| \le \delta\} \subseteq \Omega$，并且在 $|z - z_0| = \delta, f(z) \ne \omega_0$

然后选取 $\epsilon > 0$ 使得在圆周 $|z - z_0| = \delta$ 上，$|f(z) - \omega_0| \ge \epsilon$

现在如果 $|\omega - \omega_0| < \epsilon$，在圆周 $|z - z_0| = \delta$ 上 $|F(z)| > |G(z)|$，由 *Rouche* 定理可知 F 和 $F + G$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上有相同的零点数，而 F 在 $|z - z_0| < \delta$ 有且仅有一零点 z_0，故 $F + G$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 也只有一个零点，这说明 f 是开的. □

3 Appendix

Theorem .1

Theorem.

Definition .1

Definition.

Example .1

Example.

Lemma .1

Lemma

Proposition .1

Proposition

Corollary .1

Corollary.

Exercise .1

Exercise.

Proof Proof. □

Solution Solution. □

Remark Remark. □

Analysis Analysis. □

Claim Claim. □