2024 秋南开大学数分 III 期中 (伯苓班)

Sherr1 Nankai University

1 Problems

Exercise 1.1

研究下列级数的收敛性

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n}}$$

$$(2)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\Big((1+\frac{1}{n+1})^{2n}-(1+\frac{2}{n+a})^{n}\Big)$$

Solution **(1)-1**

已知 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ 收敛，考虑：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{n^2})-\sin n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\theta_n}{n^2\sqrt{n}}$$

又

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\cos\theta_n}{n^2\sqrt{n}}\right|\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n}}$$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\cos\theta_n}{n^2\sqrt{n}}\right|$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\theta_n}{n^2\sqrt{n}}$ 收敛，即有 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n}}$ 收敛. □

Solution **(1)-2**

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\cos\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\sin\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n}}$$

由于 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ 收敛，$\cos\frac{1}{n^2}$ 单调有界，故由 **Abel 判别法**可知 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\cos\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n}}$ 收敛.

由于 $\left|\frac{\cos n\sin\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n}}\right|\le\left|\frac{sin\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n}}\right|\le\frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ 且 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\sin\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n}}$ 收敛.

又由于

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\cos\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\sin\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n}}$$

故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n}}$ 收敛. □

Solution **(2)**

$$\begin{aligned}
&(1+\frac{1}{n+1})^{2n}-(1+\frac{2}{n+a})^{n}=e^{2n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}-e^{\ln\left(1+\frac{2}{n+a}\right)}\\
=&e^{2n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)}-e^{n\left(\frac{2}{n+a}-\frac{4}{2(n+a)^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)}\\
=&e^2\left(e^{\frac{2n}{n+1}-2-\frac{n}{(n+1)^2}+o(\frac{1}{n})}-e^{\frac{2n}{n+a}-2-\frac{2n}{(n+a)^2}+o(\frac{1}{n})}\right)\\
=&e^2\left(1-\frac{2}{n+1}-\frac{n}{(n+1)^2}+o(\frac{1}{n^2})-1+\frac{2a}{n+a}+\frac{2n}{(n+a)^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)\\
=&e^2\left(\frac{2a(n+1)-2(n+a)}{(n+1)(n+a)}+\frac{2}{n}-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right)=e^2\left(\frac{2a-2+1}{n}+o(\frac{1}{n})\right)\sim e^2\frac{2a-1}{n}
\end{aligned}$$

由上式可知当且仅当 $2a-1=0\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$ 时收敛，其余情况均发散. □

Exercise 1.2

判断下列积分的收敛性

$$\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{\cos(x^2)}{x^2+y^2}dxdy$$

Solution **(2)-1**

首先我们有**广义积分的绝对收敛和收敛是等价的**，故我们只需研究下列积分的收敛性即可：

$$\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{\left|\cos(x^2)\right|}{x^2+y^2}dxdy$$

由于

$$\frac{\left|\cos(x^2)\right|}{x^2+y^2}\geq\frac{1}{2(x^2+y^2)}+\frac{\cos(2x^2)}{2(x^2+y^2)}$$

故

$$\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{\left|\cos(x^2)\right|}{x^2+y^2}dxdy\geq\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{1}{2(x^2+y^2)}dxdy+\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{\cos(2x^2)}{2(x^2+y^2)}dxdy$$

反证：我们假设原积分收敛，则有：

$$\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{\left|\cos(x^2)\right|}{x^2+y^2}dxdy\text{与}\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{\cos(2x^2)}{2(x^2+y^2)}dxdy\text{均收敛}$$

进而有

$$\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{1}{2(x^2+y^2)}dxdy\text{收敛}$$

而

$$\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{1}{2(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{+\infty}\frac{r}{2r^2}dr=\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{r}dr\text{发散}$$

故矛盾，即 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{\cos(x^2)}{x^2+y^2}dxdy$ 发散. □

Solution (2)-2

$$\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{\left|\cos(x^2)\right|}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^A\frac{\left|\cos(r^2\cos^2\theta)\right|}{r^2}rdr \quad (\clubsuit)$$

令 $r=\dfrac{\sqrt{t}}{|\cos\theta|}$，则 $dr=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\dfrac{1}{|\cos\theta|}$，代入 $(\clubsuit)$ 式，我们有：

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^A\frac{\left|\cos(r^2\cos^2\theta)\right|}{r^2}rdr\geq\lim_{A\to+\infty}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\frac{1}{2}A^2}\frac{|\cos t|}{\frac{\sqrt{t}}{|\cos\theta|}}\frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{1}{|\cos\theta|}\geq 2\pi\int_1^{\frac{1}{2}A^2}\frac{|\cos t|}{t}dt \quad \text{发散}$$

故 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{\cos(x^2)}{x^2+y^2}dxdy$ 发散. □

Exercise 1.3

研究下列积分的收敛性

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}\cos xdx$$

Solution (3) 十分基础的题目

可能的奇点：$0,+\infty$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}\cos xdx=\int_0^1\frac{x^q}{1+x^p}\cos xdx+\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}\cos xdx$$

在 $x=0$ 处，$\dfrac{x^q}{1+x^p}\cos x\sim x^q(x\to 0^+)\Rightarrow q>-1$ 收敛.

在 $x\to+\infty$ 处，

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}\cos xdx=\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^p}x^{q-p}\cos xdx$$

显然由 *Cauchy* 判别法易知 $q-p\geq 0$ 发散.

当 $q-p<-1$ 时，

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^p}{1+x^p}x^{q-p}\cos x\right|dx\leq\int_1^{+\infty}x^{q-p}dx \quad \text{收敛}$$

即此时有 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}\cos xdx$ 绝对收敛.

当 $-1\leq q-p<0$ 时，

$$\left|\frac{x^p}{1+x^p}x^{q-p}\cos x\right|\geq\frac{1}{2}x^{q-p}\cos^2 x=\frac{1}{4}x^{q-p}(1+\cos 2x)=\frac{1}{4}x^{q-p}+\frac{1}{4}x^{q-p}\cos 2x$$

而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{4}x^{q-p}dx$ 发散，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{4}x^{q-p}\cos 2xdx$ 由 *Dilichlet* 判别法易知收敛，故

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^p}{1+x^p}x^{q-p}\cos x\right|dx\geq\int_1^{+\infty}\frac{1}{4}x^{q-p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{4}x^{q-p}\cos 2xdx \quad \text{发散}$$

故此时有 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}\cos x dx$ 条件收敛.

综上：

$$\begin{cases} q-p<-1\text{且}q>-1 & \text{绝对收敛} \\ -1\le q-p<0\text{且}q>-1 & \text{条件收敛} \\ q-p\ge 0\text{或}q\le -1 & \text{发散} \end{cases}$$

□

Exercise 1.4

设 $p\ge 0$，数列 a_n 满足 $a_1=1, a_{n+1}=n^{-p}\arctan a_n$，判断并证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

的收敛性

Solution

①$p>0$ 时，

$$\arctan x\sim x(x\to 0)\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}\sim n^{-p}\to 0(n\to\infty)$$

由达朗贝尔判别法知**收敛**.

②$p=0$ 时，

$$a_{n+1}=\arctan a_n\quad \arctan x\sim x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^r}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^r-a_n^r}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r\theta_n^{r-1}(a_{n+1}-a_n)}{1}=\lim_{n\to\infty}ra_n^{r-1}(-\frac{1}{3}a_n^3)=-\frac{r}{3}\lim_{n\to\infty}a_n^{r+2}$$

取 $r=-2$ 有 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{-2}}{n}=\frac{2}{3}\Rightarrow a_n\sim\sqrt{\frac{2}{3n}}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ **发散**. □

Exercise 1.5

判断下列积分的收敛性

$$\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^3]}dx$$

Solution

显然这是一个**非绝对收敛**的积分.

$$\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^3]}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\sqrt[3]{n}}^{\sqrt[3]{n+1}}(-1)^n dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}\right)(-1)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3\sqrt[3]{\theta_n^2}}$$

其中 $n\le\theta_n\le n+1$，故由 *Libiniz* 判别法知收敛，即 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^3]}dx$ **条件收敛**. □

Exercise 1.6

设 G 为 $\mathbb{R}^2$ 上的有界闭区域，∂G 由有线条分段光滑的简单闭曲线构成，假设 $u \in C^2(G)$，且 u 在边界上恒为 0，证明对 $\forall\lambda > 0$，

$$\lambda \int_G u^2 dxdy + \frac{1}{\lambda} \int_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy \geq 2 \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dxdy$$

Solution

由于 u 在 ∂G 上恒为 0，故由 $Green Formula$ 有

$$0 = \int_{\partial G} u(u_x dy - u_y dx) = \iint_G (u_x^2 + u_y^2 + u \cdot u_{xx} + u \cdot u_{yy}) dxdy \Rightarrow \iint_G (u_x^2 + u_y^2) dxdy = \iint_G -u(u_{xx} + u_{yy}) dxdy$$

由 $Cauchy - Schwart$ 积分不等式有：

$$\begin{aligned}
&\lambda \int_G u^2 dxdy + \frac{1}{\lambda} \int_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy \geq 2 \iint_G |u(u_{xx} + u_{yy})| \, dxdy \\
\geq& 2 \iint_G -u(u_{xx} + u_{yy}) dxdy = 2 \iint_G (u_x^2 + u_y^2) dxdy = 2 \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dxdy
\end{aligned}$$

故综上：

$$\lambda \int_G u^2 dxdy + \frac{1}{\lambda} \int_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy \geq 2 \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dxdy$$

□